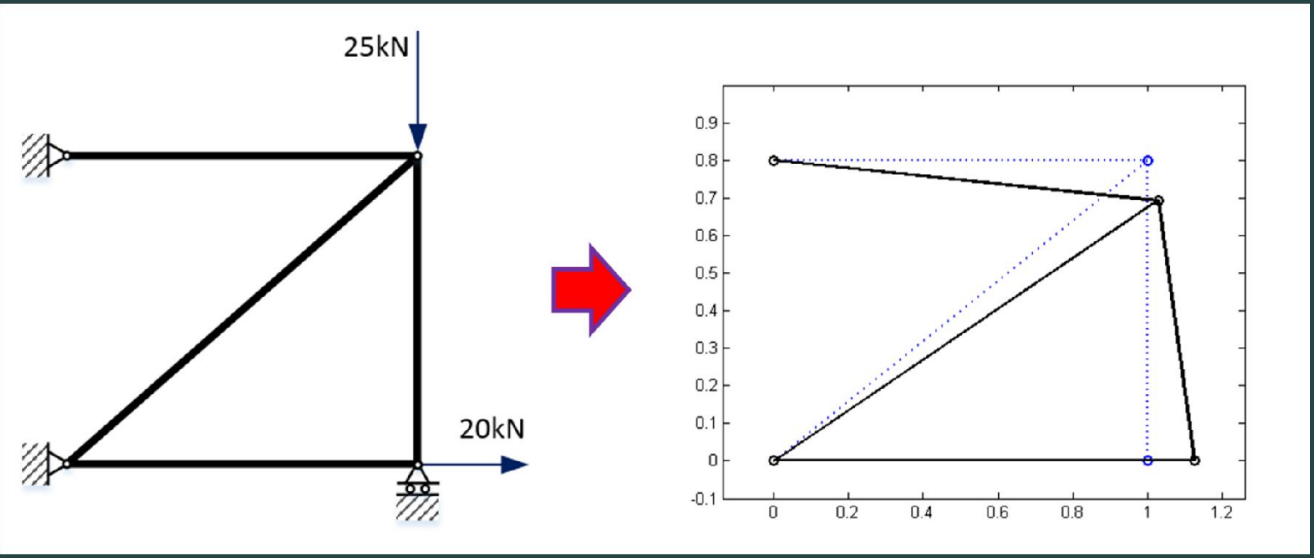
www.SoftGozar.Com

IDEA
Iran, Designers, Engineers, Advisors

تحلیل اجزاء محدود خرپای دو بعدی در MATLAB

www.IranIDEA.net



مدرس:

مهدی همت آبادی

www.SoftGozar.Com

حق مالکیت اثر

از آنجایی که هدف گروه ایده از آماده‌سازی این متن، آموزش فنون برنامه‌نویس می‌باشد، لذا هرگونه نشر و کپی‌برداری از کل یا بخشی از این اثر، با ذکر منبع و یا بدون ذکر منبع بلامانع است. ولی نظر به صرف وقت و هزینه برای آماده‌سازی این اثر، انتفاع مادی و معنوی از این اثر به هر صورت قابل تصور، بدون هماهنگی با ناشر و مؤلف موجب ضایع نمودن حق صاحب اثر می‌گردد.

www.SoftGozar.Com

فهرست

۱. مقدمه ۱

۲. معادلات اجزاء محدود ۱

۱,۲. ماتریس سختی ۱

۲,۲. روابط تنش ۴

۳,۲. اصلاح ماتریس سختی و بردار جابجایی ۵

۳. صورت مسئله ۶

۴. برنامه MATLAB ۷

۱,۴. برنامه اصلی ۷

۲,۴. تابع محاسبه کسینوس هادی و طول المان (conductor) ۱۱

۳,۴. تابع محاسبه ماتریس سختی هر المان (element_stiffness) ۱۲

۴,۴. تابع محاسبه ماتریس سختی کل (total_stiffness) ۱۲

۵,۴. تابع محاسبه تنش در هر المان (element_stress) ۱۳

۵. بررسی نتایج ۱۴

۶. اعمال جابجایی به عنوان شرایط مرزی ۱۵

۱,۶. صورت مسئله ۱۵

۲,۶. برنامه MATLAB ۱۵

۳,۶. بررسی نتایج ۱۶

۷. تمرین ۱۷

توجه

تمام m فایل‌های استفاده‌شده در این مجموعه آموزشی، در فایل rar دانلود شده موجود است. چون این برنامه دارای تابع می‌باشد، توجه شود که حتماً باید Current Folder نرم‌افزار بر روی فولدر این مجموعه تنظیم شود.

۱. مقدمه

مطابق تعریف خرپا شامل اعضای دو نیرویی می‌باشد. به همین دلیل این اعضا فقط می‌توانند تحیت فشار یا کشش باشند. در این سازه تمام نیروها و عکس‌العمل‌ها به مفاصل وارد می‌شود و تمام اعضاء توسط پین‌های بدون اصطکاک در دو انتها به هم وصل شده‌اند. در استاتیک برای محاسبه نیرو در هر عضو از روش مفصل یا روش برش استفاده می‌شود. در این مجموعه هدف استفاده از روش اجزاء محدود برای استخراج نتایجی همانند جابجایی و تنش در اعضا و مفصل‌ها می‌باشد. همچنین باید توجه داست که روش اجزاء محدود برای سازه‌های معین یا نامعین استاتیکی رویکرد حل برابر دارد.

۲. معادلات اجزاء محدود

معادلات را در دو بخش ماتریس سختی و رابطه تنش دنبال می‌کنیم که این دو در ادامه آورده شده است.

۱،۲. ماتریس سختی

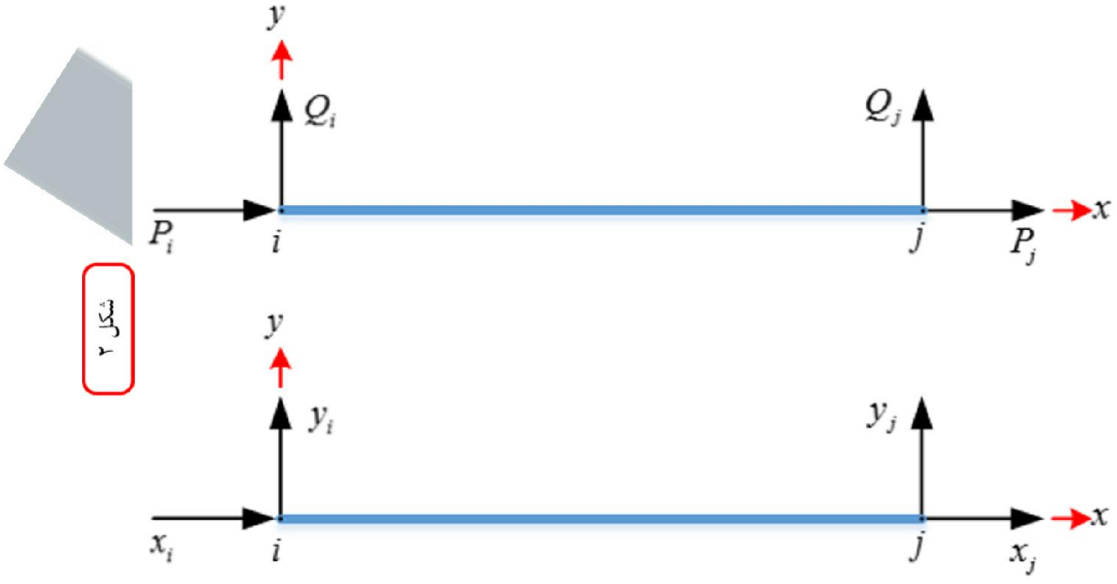
همانند شکل ۱ یک عضو دو نیرویی را در دستگاه مختصاتی که محور x آن در راستای محور عضو و محور y آن در عمود بر محور عضو است، فرض کنید. به این دستگاه مختصات دستگاه مختصات محلی (Local Coordinate System) گفته می‌شود که همواره به عضو چسبیده و به همراه آن دوران می‌کند.

شکل ۱

اگر همانند شکل ۲ جابجایی و نیروی اعمالی به دو سر عضو (گره‌ها) را به صورت زیر در مختصات محلی در نظر بگیریم می‌توان رابطه هوک را به صورت زیر نوشت:

$$P_i = \frac{A_e E_e}{l_e}(x_i - x_j) \qquad Q_i = 0$$
$$P_j = \frac{A_e E_e}{l_e}(x_j - x_i) \qquad Q_j = 0 \qquad (۱)$$

در این رابطه A_e، مساحت سطح مقطع المان، l_e، طول المان و E_e مدول الاستیک می‌باشد. با توجه به این که این سازه فقط در راستای محوری نیرو تحمل می‌کند، در راستای عمودی هر دو نیروی گره‌ای صفر هستند.



شکل ۲

۴ معادله موجود در رابطه ۱ را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نیز ارائه نمود.

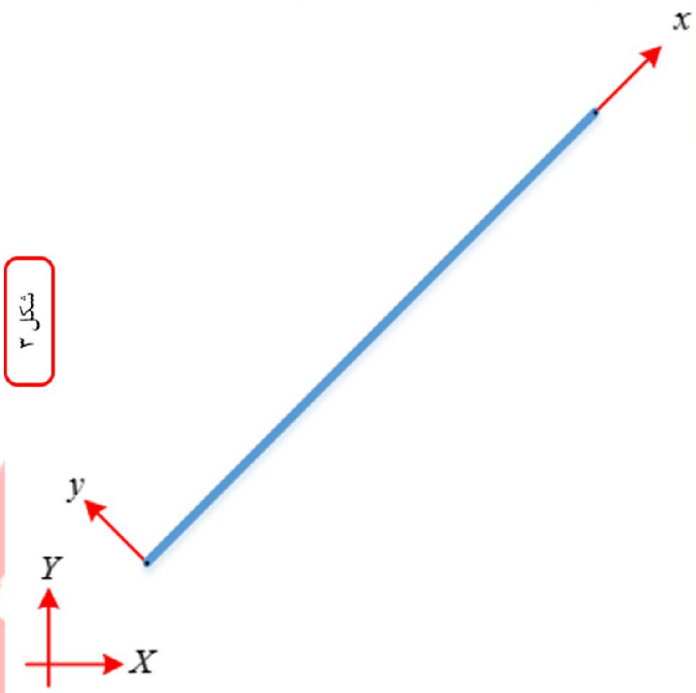
$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \end{Bmatrix} = \frac{A_e E_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

رابطه ۲ را به فرم زیر خلاصه می‌کنیم.

$$\boldsymbol{f} = S\mathbf{r} \quad (۳)$$

که در این رابطه $\boldsymbol{f}$ بردار نیروی گره‌ای در مختصات محلی، $\mathbf{r}$ بردار جابجایی گره‌ای در مختصات محلی و S ماتریس سختی در مختصات محلی است.

حال عضو قبلی را به اندازه θ دوران می‌دهیم همانند شکل ۳ آن را در دستگاه مختصات جهانی (Global Coordinate System) XoY قرار می‌دهیم. توجه شود که دستگاه مختصات محلی با عضو به اندازه θ دوران کرده است.



شکل ۳

همانند شکل ۴ نیروهای گره‌ای در مختصات جهانی رسم شده که باید این نیروها را به نیروهای گره‌ای در مختصات محلی مرتبط کنیم. برای این کار باید نیروی گره‌ای در مختصات جهانی در راستای مختصات محلی همانند روابط زیر تصویر کنیم.

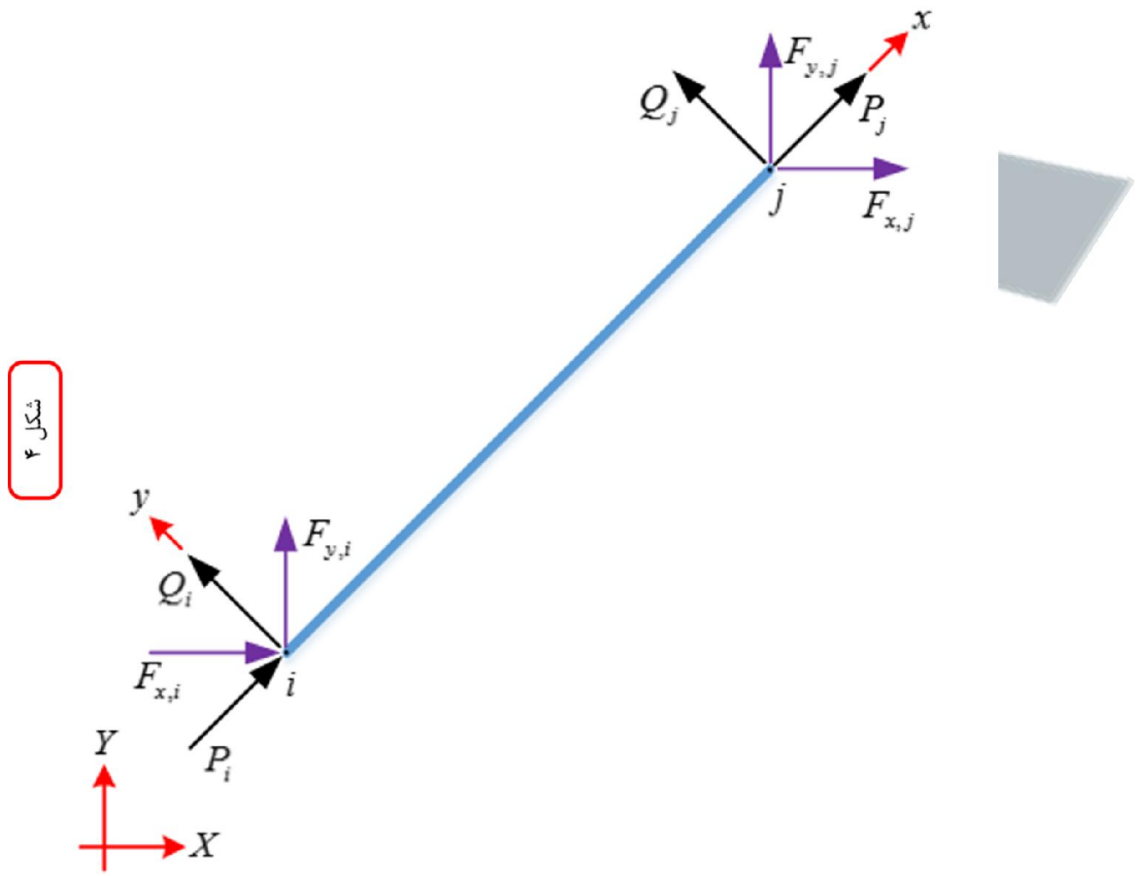
$$\begin{aligned} P_i &= F_{x,i}\cos(\theta) + F_{y,i}\sin(\theta) \\ Q_i &= -F_{x,i}\sin(\theta) + F_{y,i}\cos(\theta) \\ P_j &= F_{x,j}\cos(\theta) + F_{y,j}\sin(\theta) \\ Q_j &= -F_{x,j}\sin(\theta) + F_{y,j}\cos(\theta) \end{aligned} \quad (۴)$$

با تغیر متغیر به صورت $l = \cos(\theta)$ و $m = \sin(\theta)$ می‌توان رابطه ۴ را در فرم ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{Bmatrix} \quad (۵)$$

که این رابط را نیز می‌توان به فرم زیر خلاصه نمود:

$$\boldsymbol{f} = R\mathbf{F} \quad (۶)$$



شکل ۴

در رابطه ۶، **F** بردار نیروی گره‌ای در مختصات جهانی و R ماتریس تبدیل دستگاه مختصات است. به همین ترتیب مطابق شکل ۵ می‌توان برای جابجایی در مختصات جهانی و محلی رابطه زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} x_i &= u_i \cos(\theta) + v_i \sin(\theta) \\ y_i &= -u_i \sin(\theta) + v_i \cos(\theta) \\ x_j &= u_j \cos(\theta) + v_j \sin(\theta) \\ y_j &= -u_j \sin(\theta) + v_j \cos(\theta) \end{aligned} \qquad (۷)$$

که این رابطه هم با تغیر متغیر قبلی به فرم ماتریسی زیر قابل نمایش است.

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (۸)$$

که می‌توان این رابطه را به صورت زیر خلاصه نمود.

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{u} \qquad (۹)$$

در رابطه ۹، **u** بردار جابجایی گره‌ای در مختصات جهانی است. حال با قرار دادن رابطه ۶ و ۹ در رابطه ۳ می‌توان نوشت:

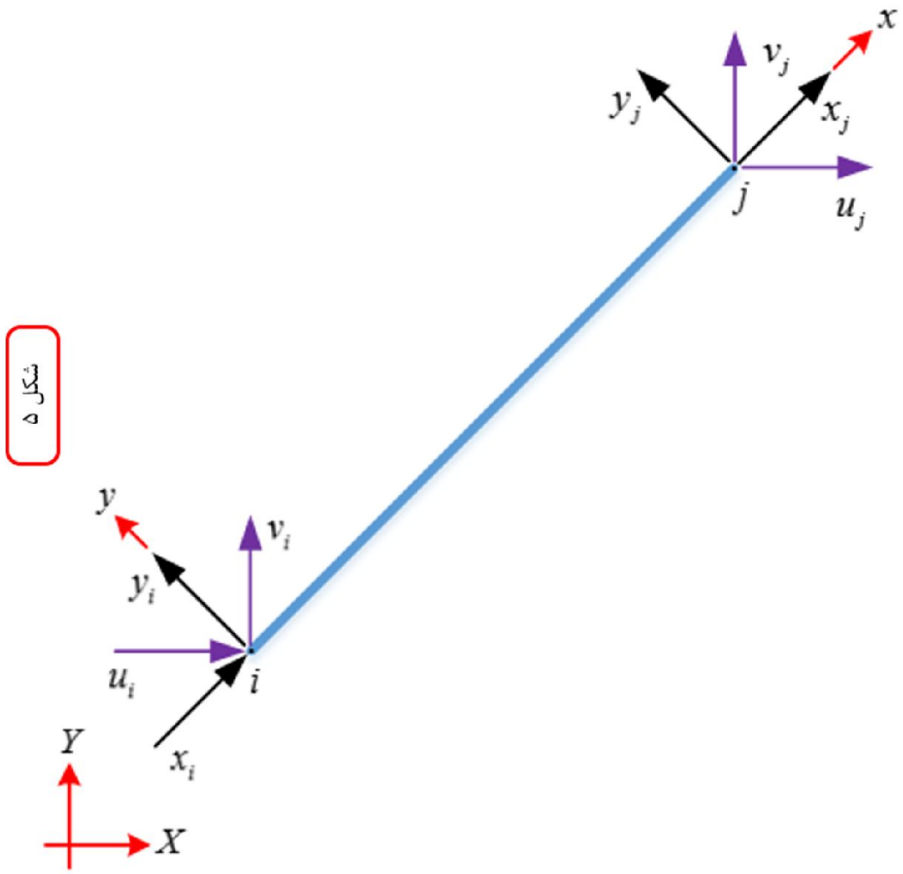
$$R\boldsymbol{F} = SR\boldsymbol{u} \qquad (۱۰)$$

برای تبدیل این رابطه به رابطه نیرو-جابجایی می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{F} = R^{-1}SR\boldsymbol{u} \qquad (۱۱)$$

به این ترتیب رابطه هوک را در مختصات جهانی نوشته‌ایم.

www.SoftGozar.Com



شکل ۵

حال با مقایسه این رابطه و رابطه هوک می‌توان ماتریس سختی در مختصات جهانی را به صورت زیر نوشت.

$$K = \frac{A_e E_e}{l_e}\begin{bmatrix} l & -m & 0 & 0 \\ m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -m \\ 0 & 0 & m & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

با اجرای ضرب ماتریسی فوق، ماتریس سختی به صورت زیر قابل استخراج است.

$$K = \frac{A_e E_e}{l_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

به این ترتیب ماتریس سختی هر المان به دست می‌آید. همچنین با کمی توجه می‌توان دریافت که l و m در واقع کسینوس هادی هر المان می‌باشند.

۲,۲. روابط تنش

در دستگاه مختصات محلی می‌توان تنش در یک عضو را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma = E_e \varepsilon \quad (۱۴)$$

کرنش را با توجه به جابجایی گره‌ای در راستای المان می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon = \frac{(x_j - x_i)}{l_e} \quad (۱۵)$$

از روابط ۱۴ و ۱۵ می‌توان نوشت:

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e}(x_j - x_i) \quad (۱۶)$$

که این رابطه به صوت ماتریسی با بردار جابجایی گره‌ای در مختصات محلی همانند زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \qquad (۱۷)$$

با قرار دادن رابطه ۸ در رابطه ۱۷ رابطه تنش برای هر المان در مختصات جهانی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (۱۸)$$

با انجام ضرب ماتریسی خواهیم داشت:

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e}[-l \quad -m \quad l \quad m]\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (۱۹)$$

۳,۲. اصلاح ماتریس سختی و بردار جابجایی

بعد از ایجاد ماتریس سختی و بردار نیرویی، نوبت به اعمال شرایط مرزی می‌باشد. شرایط مرزی به صورت جابجایی گره‌ای در مسئله مشخص می‌شود. این جابجایی ممکن است خود یک بار اعمالی باشد و یا مثلاً خطای ساخت در طول یک عضو باشد که باعث می‌شود در زمان مونتاژ سازه، یک قطعه با کشش یا فشرده شدن اولیه سر جای خود قرار گیرد. حتی ممکن است با اعمال یک تکیه‌گاه این جابجایی تبدیل به مقدار صفر شود. در هر صورت اگر این وضعیت در مسئله به وجود آید هم باعث ظاهر شدن یک مقدار ثابت در بردار مجهولات جابجایی در دستگاه ۲۰ شود و هم در شرایطی می‌تواند باعث ایجاد نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه می‌شود که به فقط در انتهای حل قابل محاسبه است. این نیروی عکس‌العمل به صورت یک مقدار مجهول در بردار جابجایی گره‌ای در رابطه ۲۰ می‌شود که مانع از امکان حل این دستگاه می‌شوند.

$$K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \qquad (۲۰)$$

برای رفع این مشکل دو روش وجود دارد. در روش اول باید سطر و ستون متناظر با مقدار تکیه‌گاهی را در ماتریس سختی حذف نمود و برای حفظ درجه دستگاه، همین عنصر از بردار نیروی گره‌ای حذف شود (با این کار مقدار مجهول از بردار جابجایی حذف می‌شود). باید توجه داشت با این کار درجه دستگاه تغیر می‌کند و در نهایت بردار جابجایی گره‌ای دیگر هم بعد با درجه آزادی مجموعه نیست و لازم است بعد از حل مجدداً مقادیر مرزی که قبلاً حذف شده بود را باز بردار جابجایی برگردانیم.

در روش دوم بجای حذف کردن از صفر کردن استفاده می‌شود. به این ترتیب دیگر درجه دستگاه معتدلات تغیر نمی‌کند. به طور مثال در نظر بگیرید جابجایی در راستای مشخص در گره‌ی i برابر $\bar{u}$ است. حال اگر سطرjام از دستگاه معادلات ۲۰ را بسط دهیم به صورت زیر خواهد بود.

$$K(j,1)u_1 + \cdots + K(j,i)\bar{u} + \cdots + K(j,N)u_N = F(j) \qquad (۲۱)$$

با توجه به معلوم بودن مقدار $\bar{u}$، می‌توان آن را به سمت راست رابطه منتقل نمود.

$$K(j,1)u_1 + \cdots + 0\bar{u} + \cdots + K(j,N)u_N = F(j) - K(j,i)\bar{u} \qquad (۲۲)$$

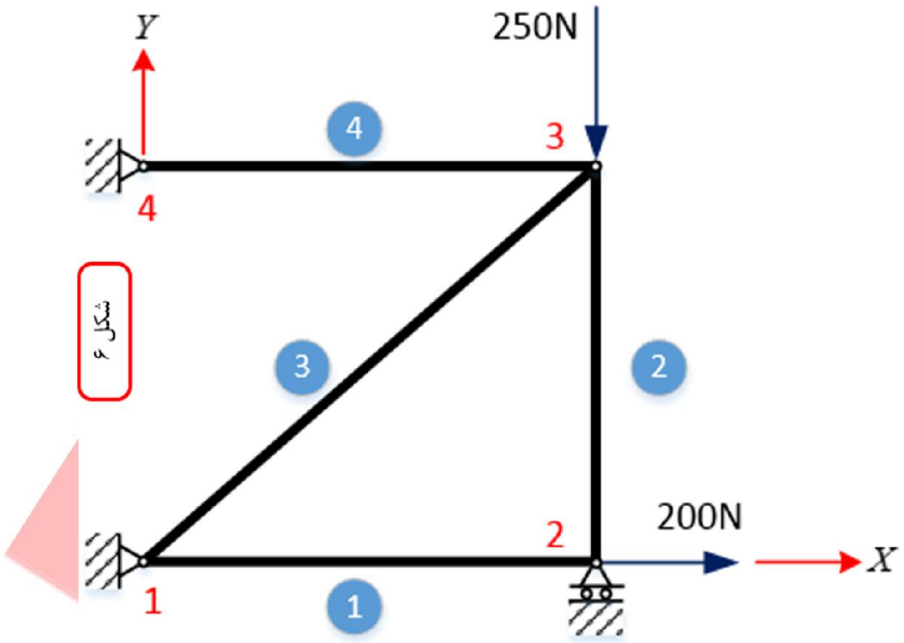
حال اگر رابطه ۲۲ را برای تمام سطرها بنویسیم معادل صفر کردن تمام اعضای ستون iام است. حال اگر از ابتدا رابطه را برای ستون jام بسط می‌دادیم با استدلالی مشابه استدلال فوق باید سطر iام نیز صفر شود. ولی برای این که بعد از حل مستقیماً $\bar{u}$ در بردار جابجایی گره‌ای دیده شود باید عنصر $K(i,i)$ یعنی عنصر روی قطر اصلی را برابر ۱ کرده و مقدار متناظر در بردار نیرویی را $\bar{u}$ قرار دهیم. همچنین با اعمال این تغییرات باید بردار نیرویی به صورت $F(j) - K(j,i)\bar{u}$ تغییر کنند تا اثر صفر کردن یک سطر و ستون بر بخش‌هایی که دارای تکیه‌گاه نیستند اثر نکند. به این ترتیب در انتهای حل، بردار جابجایی گره‌ای به صورت کامل به دست می‌آید. به این ترتیب دستگاه معادلات ۲۰ با اعمال یک شرط تکیه‌گاهی به صورت رابطه ۲۳ قابل ارائه است.

$$\begin{bmatrix} K(1,1) & \cdots & 0 & \cdots & K(1,N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K(N,1) & \cdots & 0 & \cdots & K(N,N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(1) - K(i,1)\bar{u} \\ \vdots \\ \bar{u} \\ \vdots \\ F(N) - K(N,1)\bar{u} \end{Bmatrix} \quad (۲۳)$$

ناگفته مشخص است که اگر جابجایی در شرایط مرزی مقدار صفر داشته باشد، بسیاری از محاسبات فوق قابل حذف بوده (مثلاً تغییر بردار نیرویی با $F(j) - K(j,i)\bar{u}$ و کد سریع‌تر به جواب می‌رسد. در این برنامه با وجود این که جابجایی‌ها همگی از مقدار صفر پیروی می‌کنند ولی باز هم کد به صورت کامل نوشته شده است و در انتها یک مثال با جابجایی در تکیه‌گاه بررسی می‌شود.

۳. صورت مسئله

در این گزارش هدف آموزش روش اجزاء محدود در سازه‌ای همانند شکل ۶ است که شرایط تکیه‌گاهی و شرایط بارگذاری نیز در آن مشخص شده است. البته باید توجه داشت در برنامه‌ی موجود تمام بخش‌ها قابل‌استفاده برای هر خرپای دو بعدی دیگر می‌باشد بجز بخش آخر (displacement result). در بخش‌های دیگر برنامه کافی است فقط خواص المان، مختصات گره‌ها و ماتریس اتصال المانی تغیر کند تا برنامه برای سازه‌ی مرد نظر قابل‌اجرا شود.



شکل ۶

مختصات گره‌ها با توجه به شماره‌های موجود در شکل ۶ به صورت زیر است:

Node Number	x (m)	y (m)
1	0	0
2	1	0
3	1	0.8
4	0	0.8

مدول الاستیک $E_e = 200MPa$ و سطح مقطع $A_e = 8mm^2$می‌باشد. با مشخص بودن این موارد مطلوب است محاسبه:

- بردار جابجایی گره‌ای
- تنش در هر المان
- نیروی تکیه‌گاهی

۴. برنامه MATLAB

این بخش شامل شرح برنامه اصلی و سه تابع مربوط به ماتریس سختی هر المان، ماتریس سختی کل و تنش در هر المان می‌باشد. نام برنامه اصلی truss_2D_FEM است که به همراه سه تابع در مجموعه دانلود شده از سایت موجود است. در ادامه خطوط برنامه شرح داده می‌شود.

۱,۴. برنامه اصلی

خط ۸: در این خط با دستور clc می‌توان Command Window را پاک نمود.

```
clc
```

خط ۹: با دستور clear می‌توان تمام متغیرهای موجود در Workspace را پاک نمود.

```
clear all
```

توجه: خط ۸ و خط ۹ تقریباً بخش ثابت در تمام برنامه‌ها می‌باشند.

خط ۱۲ و ۱۳: در این دو خط A_e، سطح مقطع و E_e مدول الاستیک اعضا تعین می‌شود. توجه شود که سطح مقطع برای تمام اعضا یکسان در نظر گرفته شده است.

```
A_e=8; % unit mm^2,
E_e=200; % unit MPa,
```

خط ۱۵ و ۱۶: در خط ۱۵ با توجه به جدول صفحه قبل، مختصات هر گره تعین شده است. برای این کار از یک ماتریس استفاده‌شده که دارای دو ستون است. تعداد سطرهای ماتریس برابر تعداد گره‌ها است. به این ترتیب برای خواندن مختصات گره iام کافی است اعداد سطر iام را بخوانیم. در خط ۱۶ نیز با دستور length تعداد گره‌ها خوانده شده است (توجه شود که دستور size برای خواندن سطر و ستون ماتریس است و دستور length برای خواندن طول بردار ولی اگر دستور length بر ماتریس اعمال شود، بزرگ‌ترین بعد ماتریس را اعلام می‌کند).

```
node=[0 0;1 0;1 .8;0 .8]; % nodal coordinate, unit m,
num node=length(node); % number of node,
```

خط ۱۷ و ۱۸: در خط ۱۷ با توجه به شکل ۶، شماره گره‌های هر المان خوانده‌شده. در اینجا نیز از یک ماتریس با دو ستون استفاده‌شده که ستون اول مختصات گره iام و ستون دون مختصات گره jام هر المان است. تعداد سطرها نیز برابر تعداد المان‌ها می‌باشد. بنابراین برای خواندن شماره گره‌های المان eام، کافی است که سطر eام را استخراج نماییم. همچنین در خط ۱۸ با استفاده از دستور length تعداد المان‌ها محاسبه شده است.

```
element=[1 2;3 2;1 3;4 3]; % element connection,
num element=length(element); % number of element,
```

خط ۲۰: درجه آزادی هر گره با توجه به این که مسئله دو بعدی است برابر ۲ است. بنابراین با ضرب تعداد گره‌ها در عدد ۲ می‌توان درجه آزادی کل یا بعد ماتریس سختی کل را محاسبه نمود.

```
DoF=2*num_node; % total degree of freedom,
```

خط ۲۳: برای محاسبه ماتریس سختی هر المان باید کسینوس هادی هر المان و طول المان محاسبه شود. از طرفی در خط ۱۵ مختصات گره‌ها داده شده است و با این مختصات می‌توان کسینوس هادی و طول المان‌ها را محاسبه نمود. در این خط یک ماتریس با اعضای صفر ایجادشده که به تعداد المان‌ها داری سطر است و سه ستون دارد. ستون اول l، ستون دوم m و ستون سوم طول هر المان است که در حلقه بعدی کامل می‌شود.

```
T=zeros(num_element,3); % T is a matrix, each row contains conductor vector
                        % and element length,
```

خط ۲۵ و ۲۶: در این دو خط نیز ماتریس سختی هر المان و ماتریس سختی کل با اعضای صفر ایجادشده تا در حلقه‌ی بعدی تکمیل شوند. برای ماتریس سختی هر المان از یک ماتریس مکعبی استفاده‌شده که تعداد صفحات آن به تعداد المان‌ها می‌باشد و در هر صفحه یک ماتریس 4x4 دارد (چون هر المان ۲ گره دارد و هر گره ۲ درجه آزادی، پس درجه آزادی هر المان می‌شود ۴). ماتریس سختی کل هم که با توجه به عبارت خط ۲۰ تعریف شده است.

```
k=zeros(4,4,num_element); % "k" is stiffness matrix of each element,
K=zeros(DoF); % "K" is total stiffness matrix,
```

خط ۲۸: این خط آغاز بخش اصلی برنامه می‌باشد. در این خط یک حلقه تکرار شروع شده که به تعداد المان‌ها تکرار می‌شود. در این حلقه قرار است بردار هادی هر المان، طول هر المان، ماتریس سختی هر المان و ماتریس سختی کل ساخته شود.

```
for i=1:num_element
```

خط ۲۹: برای محاسبه موارد گفته‌شده در بند بالا، باید شماره گره‌های هر المان و مختصات این گره‌ها از ماتریس‌های خط ۱۵ و ۱۷ خوانده شود. برای این منظور در این خط شماره گره‌های هر المان از ماتریس element خوانده شده و در متغیر n ریخته می‌شود. توجه شود که عبارت element(i,:) به معنای تمام اعضای سطر iام است.

```
n=element(i,:); % extracting number of node for each element,
```

خط ۳۰ و ۳۱: در این دو خط باید مختصات گره i و j هر المان خوانده شود. برای این منظور با n(1) شماره گره‌ی i خوانده شده و با دستور node(n(1),:) از برنامه خواسته می‌شود که تمام اعضای سطر n(1)ام ماتریس node خوانده شود. به این ترتیب مختصات گره‌ی i در عبارت I ریخته می‌شود. همین کار برای گره‌ی j نیز انجام شده تا مختصات آن در عبارت J ریخته شود.

```
I=node(n(1),:); % driving coordinate of i node,
J=node(n(2),:); % driving coordinate of j node,
```

خط ۳۲: در این خط با فراخوانی تابع conductor و ارسال مختصات گره‌ی i و j -که در بند قبل ایجاد شد- به تابع، مقادیر کسینوس هادی l و m و همچنین طول هر المان در سطر معین ماتریس T ریخته می‌شود. ساختار تمام توابع در بخش بعد شرح داده می‌شود.

```
T(i,:)=conductor(I(1),I(2),J(1),J(2));
```

خط ۳۳: در این خط ماتریس سخطی المان ساخته می‌شود. با توجه به رابطه ماتریسی ۱۳، باید کسینوس هادی هر المان به همراه طول و سطح مقطع و مدول الاستیک مشخص باشند تا ماتریس سختی به دست آید که تمام این مقادیر محاسبه شده‌اند. حال با فراخوانی تابع element_stiffness و ارسال مقادیر گفته‌شده به تابع، رابطه ماتریسی ۱۳ ساخته می‌شود. این ماتریس در صفحه مشخص از ماتریس مکعبی ایجاد شده در خط ۲۵ قرار می‌گیرد. عبارت T(:,:,i) به معنای تمام سطر و ستون‌های صفحه iام ماتریس می‌باشد.

```
k(:,:,i)=element_stiffness(A_e,E_e,T(i,:)); % stiffness of each element,
```

خط ۳۴: در این خز با فراخوانی تابع total_stiffness و ارسال ماتریس سختی هر المان و ماتریس سختی کل، هر عنصر از ماتریس سختی هر المان در محل مناسب از ماتریس سختی کل قرار می‌گیرد. برای تعین محل مناسب، باید شماره گره‌های هر المان نیز خوانده شود که این کار در خط ۲۹ انجام شده است. بنابراین متغیر n نیز به تابع ارسال می‌گردد. ساختار تابع در بخش بعد شرح داده شده است. تا انتهای این مرحله ماتریس سختی کل ایجاد شده است.

```
K=total_stiffness(K,k(:,:,i),n); % total stiffness matrix,
```

خط ۳۸: بعد از ماتریس سختی کل باید بردار نیروی گره‌ای را ایجاد نمود تا در نهایت با حل دستگاه معادلات ۲۰ بتوان بردار جابجایی گره‌ای را محاسبه نمود. در این خط با توجه به بعد بردار نیروی گره‌ای، یک بردار با اعضای صفر ایجاد شده است.

```
f=zeros(DoF,1); % nodal force vector,
```

خط ۳۹ و ۴۰: در این خط باید شرایط بارگذاری اعمال شود. با توجه به شکل ۶، نیروهای اعمالی شامل 200N روی گره ۲ در راستای محور X و نیروی 250N روی گره ۳ خلاف جهت محور Y می‌باشد. نکته‌ی مهم تعین کردن محل این دو مقدار در بردار نیروی گره‌ای است. برای این منظور باید از شماره گره‌ها استفاده کرد. اگر شماره گره i باشد، نیرو در راستای محور X در سطر $2i-1$ و نیرو در راستای محور Y در سطر $2i$ بردار نیرویی قرار می‌گیرد. بنابراین این دو نیرو به ترتیب باید روی سطر ۳ و سطر ۶ بردار نیروی گرهای قرار گیرد. این کار در این دو خط اجرا شده است.

```
f(3)=200; % Unit N,
f(6)=-250; % Unit N,
```

خط ۴۲: در این بخش نوبت به اعمال شرایط تکیه‌گاهی است. برای این منظور ابتدا باید گره‌هایی که دارای تکیه‌گاه می‌باشند. را تعیین کرد. همچنین باید تعین شود که تکیه‌گاه در کدام راستا مانع حرکت می‌شود، اگر در گره i حرکت در راستای X مهار شود، جابجایی صفر مربوط به سطر $2i-1$ بردار جابجایی گره‌ای و اگر تکیه‌گاه در جهت Y مانع حرکت شود، جابجایی صفر مربوط به عنصر $2i$ از بردار جابجایی گره‌ای است. در این خط با توجه به شکل ۶، سطرهایی که دارای مقدار جابجایی صفر هستند تعین شده است. باید توجه داشت که وجود این تکیه‌گاه‌ها باعث ایجاد نیروی گره‌ای (نیروی تکیه‌گاهی) می‌شود که در بردار جابجایی مقدار مجهول دارد.

```
prescribedDof=[1 2 4 7 8]; % supported node,
```

خط ۴۳: در این خط بردار جابجایی گره‌ای با توجه به درجات آزادی با اعضای صفر ایجاد شده است. با توجه به روش مورد استفاده در فرایند اصلاح ماتریس سختی، می‌توان این سطر را حذف نمود که در خطوط بعدی شرح داده می‌شود.

```
U=zeros(DoF,1); % nodal displacement vector,
```

خط ۴۴: این خط به صورت comment در برنامه قرار داده شده است. شرایط مرزی در این مثال به صورت نیرو یا تکیه‌گاه با جابجایی صفر بود به همین دلیل به این خط نیاز نیست. ولی اگر شرایط مرزی به صورت جابجایی باشد باید این جابجایی را به صورت یک مقدار در بردار جابجایی گره‌ای اعمال نمود. این حالت می‌تواند شامل اعمال تغیر مکان در یک گره و یا خطای طول در هنگام ساخت می‌باشد که باعث می‌شود در فرایند ساخت و مونتاژ، قطعه با اعمال جابجایی سر جای خود قرار گیرد. محل این عدد باز هم با توجه به این که جابجایی در کدام جهت است و شماره گره با همان سیستم $2i-1$ و $2i$ تعیین می‌شود. در انتها یک مثال با این وضعیت حل خواهد شد. باید توجه داشت که این شماره باد در بردار خط ۴۲ نیز اعلام شود.

```
% U(N)=u; % u is a known displacement in a Node,
```

خط ۴۵: در مرحله بعدی با توجه به شرایط مرزی، ماتریس سختی دچار تغییرات می‌شود. با این وجود برای محاسبه نیروی عکس‌العمل در تکیه‌گاه نیاز به ماتریس سختی کل به فرم ابتدایی آن می‌باشد. به همین دلیل یک کپی از این ماتریس در این خط تهیه می‌شود.

```
reserved_K=K;
```

خط ۴۶: این خط آغاز یک حلقه است که در آن با توجه به موارد گفته‌شده در بخش ۳,۲ ماتریس سختی و بردار نیرویی را اصلاح می‌کند. این حلقه به تعداد شرایط تکیه‌گاهی که در خط ۴۲ تعین شد، تکرار می‌شود.

```
for ii=1:length(prescribedDof) % modification of nodal force vector and
                               % total stiffness matrix,
```

خط ۴۷ و ۴۸: با توجه به سمت راست رابطه ۲۲ باید بردار نیرویی را اصلاح کنیم. این اصلاحات در ماتریس رابطه ۲۳ نیز نشان داده شده است. برای این امر در خط ۴۸ ابتدا تفاضل از عبارت $K(j,i)\bar{u}$ محاسبه می‌شود (توجه شود که این K همان عبارت reserved_K می‌باشد چون K دچار تغییرات شده است) و در خط ۴۸ مقدار جابجایی بر روی عنصر بردار نیرویی قرار می‌گیرد. باید توجه داشت در این مثال به دلیل صفر بودن جابجایی در تمام تکیه‌گاه‌ها، این خطوط عملیات خاصی انجام نمی‌دهند.

```
f=f-reserved_K(:,prescribedDof(ii)).*U(prescribedDof(ii));
f(prescribedDof(ii))=U(prescribedDof(ii));
```

خط ۵۰ تا ۵۲: در این خطوط باید اصلاحات ماتریس سختی اعمال شود. در این بخش باید تمام اعضای سطر و ستون iام صفر شده و عنصر روز قطر اصلی برابر ۱ شود. تا به این خط بردار نیروی گره‌ای و ماتریس سختی کل کامل شده و در بخش بعد می‌توان دستگاه معادلات رابطه ۲۰ را حل نمود.

```
K(prescribedDof(ii),:)=0;
K(:,prescribedDof(ii))=0;
K(prescribedDof(ii),prescribedDof(ii))=1;
```

خط ۵۶: دستگاه معتدلات ۲۰ باید حل شود. در این دستگاه ماتریس سختی K متقارن است و به روش‌های مختلفی می‌توان آن را حل نمود. در این جا از روش حذفی گاوس استفاده می‌شود. الگوریتم این روش در MATLAB وجود دارد، کافی است از عملگر "\" برای تقسیم استفاده کنیم.

```
reserved_K=K;
```

خط ۵۹: در این قسمت نوبت به محاسبه تنش در هر المان است. برای این کار ابتدا یک بردار با اعضای صفر که تعداد سطرهای آن برابر تعداد المان‌هاست ایجاد می‌شود تا در مرحله بعد تنش هر عضو در آن سطر مناسب قرار گیرد.

```
sigma=zeros(num_element,1); % nodal force vector,
```

خط ۶۰: این خط حاوی حلقه‌ای است که به تعداد المان‌ها تکرار می‌شود. در آن قرار است ابتدا شماره گره‌های هر المان خوانده شود و مطابق رابطه ۱۹ تنش در هر المان محاسبه شود.

```
for i=1:num_element
```

خط ۶۱: این خط همانند خط ۲۹ است که در آن برای هر المان شماره گره‌ها را خوانده و در بردار n قرار می‌دهد. شماره گره‌ها برای تعیین کسینوس هادی هر المان مورد نیاز است.

```
n=element(i,:); % extracting number of node for each element,
```

خط ۶۲: در این خط تابع element_stress فراخوانی شده. در این تابع مدول الاستیک، ماتریس T (این ماتریس در خط ۳۲ ایجاد شد که شامل سه ستون بود، ستون اول مقدار کسینوس هادی l، ستون دوم مقدار کسینوس هادی m و ستون سوم طول هر المان است)، متغیر n حاوی شماره گره‌ها و U بردار جابجایی گره به تابع ارسال می‌کند تا مطابق رابطه ۱۹ تنش هر المان محاسبه شده و در سطر مناسب بردار sigma قرار داده شود.

```
sigma(i)=element_stress(E_e,T(i,:),n,U); % stress of each element,
```

خط ۶۶: در این خط برای محاسبه نیروی تکیه‌گاهی از معادله ۲۰ به همراه ماتریس سختی قبل از اصلاحات استفاده می‌شود که همان ماتریس reserved_K است. با ضرب این ماتریس در بردار جابجایی گره‌ای، بردار نیرویی گره‌ای حاصل می‌شود که سطر سوم و ششم آن همان نیروهای خارجی اعمالی به سازه می‌باشد. برای سایر گره‌ها مقدار نیرو در سطر مناسب قرار گرفته است.

```
R=reserved_K*U; %total force vector,
```

خط ۶۷: برای جدا کردن مقادیر نیروی تکیه‌گاهی می‌توان از عبارت ایجاد شده در خط ۴۲ استفاده کرد. به طوری که از در این خط از میان اعضای بردار R که در مرحله‌ی قبل ایجاد شد، فقط اعضای که مربوط به تکیه‌گاه هستند استخراج می‌شود.

```
reaction_force=R(prescribedDof); % supported node,
```

توجه: این قسمت برنامه مربوط به رسم شکل سازه قبل و بعد از بارگذاری است. تا قبل از این مرحله را با تغییر در مختصات گره‌ها و ماتریس اتصال المان‌ها و شرایط مرزی برای هر خرپای دو بعدی دیگر قابل استفاده است ولی از این بخش به بعد برای خرپاهای متفاوت نیاز به اصلاح –مخصوصاً در خطوط ۷۶ و ۷۷- دارد.

خط ۷۰: برای رسم سازه باید از مختصات گره‌ها استفاده نمود و در ادامه با استفاده از مختصات گره‌ها و بردار جابجایی، موقعیت نهایی سازه را رسم کرد. ولی این دو عبارت با یکدیگر هم بعد نیستند –مختصات گره‌ها یک ماتریس با دو ستون و بردار جابجایی یک

بردار تک ستونی است. در این خط یک ماتریس با دو ستون برای منظم کردن بردار جابجایی ایجاد شده است و جابجایی در راستای X و Y برای هر گره در یک سطر نوشته می‌شود.

```
U_matrix=zeros(num_node,2); %reorder nodal displacement as node coordinate,
```

خط ۷۱ تا ۷۳: در این خطوط یک حلقه تکرار نوشته شده که به تعداد گره‌ها تکرار می‌شود و هر بار دو عضو متوالی از بردار جابجایی با شماره سطر $2j-1$ و $2j$ را در سطر jام ماتریس U_matrix قرار می‌دهد.

```
for iii=1:num_node
    U_matrix(iii,:)=[U(2*iii-1) U(2*iii)];
end
```

خط ۷۴ و ۷۵: حال با برابر بودن بعد ماتریس مختصات گره‌ها و ماتریس جابجایی گره‌ای در این خط می‌توان موقعیت نهایی گره‌ها را به دست آورد. اگر میزان جابجایی‌ها ناچیز باشد، تفاوتی بین سازه‌ی اولیه و نهایی دیده نمی‌شود. برای این شرایط در خط ۷۴ یا مقیاس تعریف شده که توسط آن می‌توان میزان جابجایی را چند برابر نمود. در این جا این میزان برابر ۱ قرار داده شده است.

```
scale=1;
last=node+scale*U_matrix;
```

خط ۷۷ و ۷۸: برای اینکه بتوان هر المان را به صورت یک خط توسط دستور plot رسم نمود باید یک مسیر تعیین کنیم که با عبور از نقاط آن کل سازه ساخته شود. در اینجا مسیر به ترتیب شامل عبور از گره‌های ۴، ۳، ۲، ۱ و در نهایت باز ۳ می‌باشد. به این ترتیب کل سازه رسم می‌شود. برای ساختن این ترتیب، ابتدا با دستور flipup مختصات گره‌ای وارون شده و بعد به انتهای آن سطر مربوط به گره‌ی سوم اضافه شده است. این کار برای ماتریس موقعیت نهایی نیز انجام شده است.

```
first_location=[flipud(node);node(3,:)];
end_location=[flipud(last);last(3,:)];
```

خط ۸۰ تا ۸۴: این خطوط مربوط به رسم و تنظیمات محیط plot است. در خط ۸۰ دو ستون اول و دوم ماتریس موقعیت اولیه به دستور plot داده شده و از برنامه خواسته شده تا سازه را به صورت خط چین (':o') رسم کند و در گره‌ها یک دایره قرار دهد. همچنین از برنامه خواسته شد تا ضخامت خطوط را برابر ۲ قرار دهید ('linewidth',2). در خط ۸۱ با دستور hold on امکان رسم چندین منحنی در یک figure ایجاد شده است که این منحنی‌ها در دستورات plot مختلف رسم می‌شوند. در خط ۸۲ همانند خط ۸۰ موقعیت نهایی رسم شده ولی این بار به صورت خط ممتد و با رنگ مشکی و گره‌هایی به شکل دایره. در خط ۸۳ با توجه به ابعاد سازه، محدوده رسم تعیین شده که به صورت [x_min x_max y_min y_max] است و در خط ۸۴ از برنامه خواسته شده تا مقیاس دو محور x و y را یکسان نمایش دهد.

```
plot(first_location(:,1),first_location(:,2),':o','linewidth',2)
hold on
plot(end_location(:,1),end_location(:,2),'-ko','linewidth',2)
axis ([-.1 1.1 -.1 1])
axis equal
```

۲,۴. تابع محاسبه کسینوس هادی و طول المان (conductor)

قرار است در این تابع کسینوس‌های هادی $l-$ و $m-$ و همچنین طول هر المان محاسبه شود. ورودی‌های این تابع مختصات گره‌های هر المان می‌باشد.

```
function w=conductor(x1,y1,x2,y2)
```

خط ۴: با توجه به مشخص بودن مختصات دو سمت هر المان، می‌توان طول المان را محاسبه نمود که همان رابطه‌ی:

$$l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (۲۴)$$

است.

```
l_e=sqrt((x1-x2)^2+(y1-y2)^2); % length of element,
```

خط ۵ و ۶: در این دو خط کسینوس هادی المان حساب شده است که در واقع کسینوس زاویه المان با محور X و Y است. با توجه به روابط هندسی می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

```
l=(x2-x1)/l_e; % cos(theta),
m=(y2-y1)/l_e; % sin(theta) or cos(pi/2-theta),
```

خط ۷:در این خط تمام سه مقدار محاسبه شده بر روی خروجی ریخته می‌شود. البته می‌توانستیم به طور مستقیم خروجی را با سه متغیر تعریف کنیم.

```
w=[l m l_e];
```

۳,۴. تابع محاسبه ماتریس سختی هر المان (element_stiffness)

در این تابع قرار است با توجه به رابطه ۱۳ ماتریس سختی هر المان ساخته شود. به عنوان ورودی باید سطح مقطع هر المان، مدول الاستیک، کسینوس هادی هر المان و طول المان گرفته شود. کسینوس‌های هادی و طول المان همگی در ماتریس T موجود است.

```
function w=element_stiffness(A,E,T)
```

خط ۶: در این خط با توجه به تعریف سه ستون ماتریس T، کسینوس هادی و طول المان استخراج می‌شود.

```
l=T(1); m=T(2); l_e=T(3); % extractiong conductor vectors and length of
                          % element from input,
```

خط ۱۰ تا ۱۳: در این خطوط اعضای ماتریس موجود در رابطه ۱۳ نوشته شده است.

```
w=E*A/l_e*[l^2 l*m -l^2 -l*m;
           l*m m^2 -l*m -m^2;
           -l^2 -l*m l^2 l*m;
           -l*m -m^2 l*m m^2];
```

۴,۴. تابع محاسبه ماتریس سختی کل (total_stiffness)

در این تابع قرار است ماتریس سختی کل محاسبه شود. برای این منظور باید ماتریس سختی هر المان به همراه شماره گره‌های آن مشخص باشد. باز هم با همان قانون $2i-1$ و $2i$ باید اعضا را در محل مناسب خود قرار داد. در هنگام مونتاژ ماتریس‌ها، برخی گره‌ها بین المان‌ها مشترک هستند. این امر نیاز به جمع شدن مقادیر در گره‌های مشترک را روشن می‌کند. به همین دلیل ماتریس سختی کل نیز به عنوان ورودی این تابع است. این ماتریس در خطوط برنامه در سمت راست هر تساوی با مقدار ماتریس یختی المان جمع شده و روی خودش ریخته می‌شود. به این ترتیب اثر گره‌های مشترک نیز اعمال می‌شود.

```
function w=total_stiffness(K,k,n)
```

خط ۶ و۷: سومین ورودی این تابع یک بردار است که شامل گره i و j المان است. در این دو خط این دو مقدار از بردار n استخراج می‌شود.

```
i=n(1); % number of "i" node,
j=n(2); % number of "j" node,
```

خط ۹ تا ۲۷: این خطوط بخش اصلی مونتاژ ماتریس سختی کل می‌باشد. ماتریس سختی هر المان یک ماتریس 4x4 به صورت زیر است:

$$k=\begin{bmatrix} k(1,1) & k(1,2) & k(1,3) & k(1,4) \\ k(2,1) & k(2,2) & k(2,3) & k(2,4) \\ k(3,1) & k(3,2) & k(3,3) & k(3,4) \\ k(4,1) & k(4,2) & k(4,3) & k(4,4) \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

اگر شماره گره‌های مربوط به این المان i و j باشد، محل هر کدام از اعضای ماتریس رابطه ۲۵ در ماتریس سختی کل به صورت رابطه ۲۶ است.

$$K=\begin{bmatrix} K(2i-1,2i-1) & K(2i-1,2i) & K(2i-1,2j-1) & K(2i-1,2j) \\ K(2i,2i-1) & K(2i,2i) & K(2i,2j-1) & K(2i,2j) \\ K(2j-1,2i-1) & K(2j-1,2i) & K(2j-1,2j-1) & K(2j-1,2j) \\ K(2j,2i-1) & K(2j,2i) & K(2j,2j-1) & K(2j,2j) \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

حال تنها باید این اعضای متناظر را با هم جمع نمود و بر روی عنصری با بعد برابر از ماتریس سختی کل ریخت. این کار در خطوط ۸ تا ۱۲ برای سطر اول، در خطوط ۱۴ تا ۱۷ برای سطر دوم، در خطوط ۱۹ تا ۲۲ برای سطر سوم و در خطوط ۲۴ تا ۲۷ برای سطر چهارم از ماتریس سختی هر المان نوشته شده است.

```
K(2*i-1,2*i-1)=K(2*i-1,2*i-1)+k(1,1);
K(2*i-1,2*i)=K(2*i-1,2*i)+k(1,2);
K(2*i-1,2*j-1)=K(2*i-1,2*j-1)+k(1,3);
K(2*i-1,2*j)=K(2*i-1,2*j)+k(1,4);

K(2*i,2*i-1)=K(2*i,2*i-1)+k(2,1);
K(2*i,2*i)=K(2*i,2*i)+k(2,2);
K(2*i,2*j-1)=K(2*i,2*j-1)+k(2,3);
K(2*i,2*j)=K(2*i,2*j)+k(2,4);

K(2*j-1,2*i-1)=K(2*j-1,2*i-1)+k(3,1);
K(2*j-1,2*i)=K(2*j-1,2*i)+k(3,2);
K(2*j-1,2*j-1)=K(2*j-1,2*j-1)+k(3,3);
K(2*j-1,2*j)=K(2*j-1,2*j)+k(3,4);

K(2*j,2*i-1)=K(2*j,2*i-1)+k(4,1);
K(2*j,2*i)=K(2*j,2*i)+k(4,2);
K(2*j,2*j-1)=K(2*j,2*j-1)+k(4,3);
K(2*j,2*j)=K(2*j,2*j)+k(4,4);
```

خط ۲۹: در این خط ماتریس سختی کل، بر روی متغیر خروجی ریخته می‌شود. البته می‌توان ماتریس سختی را به طور مستقیم به عنوان خروجی تابع معرفی کرد.

```
w=K;
```

۵.۴. تابع محاسبه تنش در هر المان (element_stress)

در این تابع هدف محاسبه تنش در هر المان با توجه به رابطه ۱۹ می‌باشد. با توجه به این رابطه به مدول الاستیک، کسینوس هادی المان، طول المان، شماره گره‌ها و بردار جابجایی نیاز داریم. این عبارات به عنوان ورودی تابع قرار داده شده‌اند. کسینوس هادی و طول به عنوان ماتریس T خوانده می‌شوند.

```
function s=element stress(E e,T,n,U)
```

خط ۵: از بردار n شماره‌ی گره‌های هر المان خوانده شده است.

```
i=n(1); j=n(2); % extracting number of node,
```

خط ۶ و ۷: در این خطوط مقادیر کسینوس هادی و طول المان از ماتریس T خوانده شده است.

```
l=T(1); m=T(2); % extractiong conductor vectors,
l e=T(3); % extractiong conductor vectors,
```

خط ۸: برای هر المان باید بردار جابجایی مخصوص آن المان ایجاد شود. برای این کار اگر شماره گره‌ها i و j باشد، به ترتیب اعضای بردار جابجای گره‌ای المان سطرهای $2i-1$، $2i$، $2j-1$ و $2j$ از بردار جابجایی گره‌ای کل است.

```
u=[U(2*i-1) U(2*i) U(2*j-1) U(2*j)]'; %displacement vector of element,
```

خط ۹: این خط بازنویسی رابطه ۱۹ می‌باشد که خروجی آن همان تنش مربوط به المان می‌باشد.

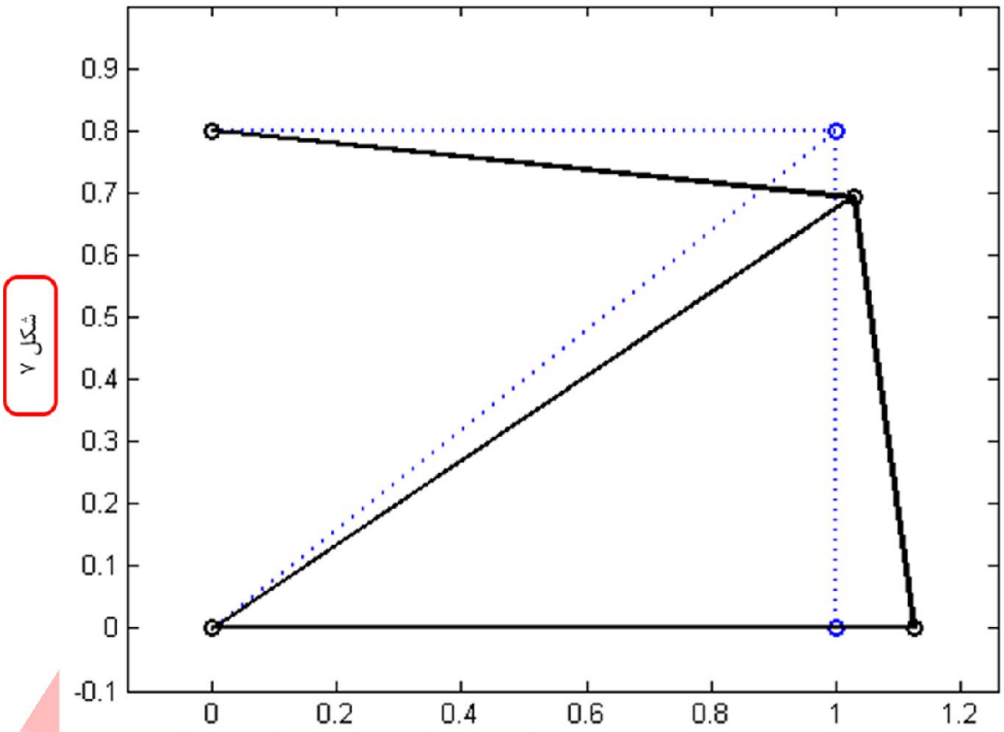
```
s=E_e/l_e*[-l -m l m]*u; % stress calculation, EQ #19
```

۵. بررسی نتایج

با اجرای برنامه بردار جابجایی به دست می‌آید. این بردار را در برنامه به یک ماتریس تبدیل نمودیم. این ماتریس به صورت زیر است:

Node	u_i	u_j
1	0.00000	0.00000
2	0.12500	0.00000
3	0.02768	-0.10728
4	0.00000	0.00000

همچنین نمودار حاصل از بخش displacement result به صورت شکل ۷ است. در این شکل اثر تکیه‌گاه‌ها به طور کامل مشخص است.



شکل ۷

تنش در المان‌ها نیز همانند جدول زیر است.

element	σ
1	25.000
2	-26.821
3	-7.091
4	5.537

همچنین نیرو تکیه‌گاهی به صورت زیراست.

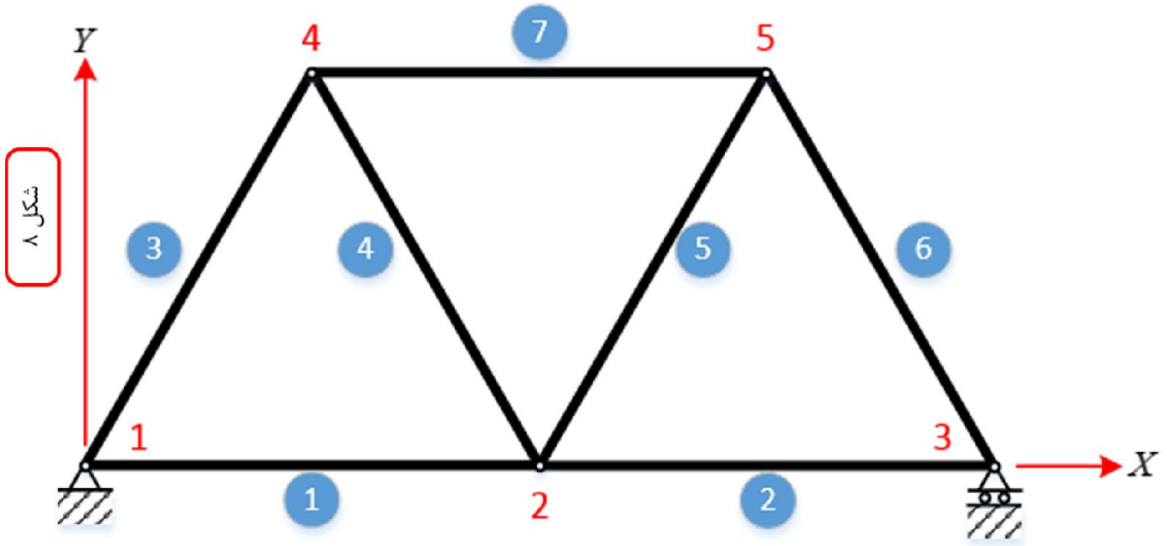
	Reaction force
$R_{1,x}$	-155.706
$R_{1,y}$	35.435
$R_{2,y}$	214.565
$R_{4,x}$	-44.294
$R_{4,y}$	0.000

۶. اعمال جابجایی به عنوان شرایط مرزی

در بخش قبل تمام شرایط مرزی به صورت نیروی متمرکز و تکیه‌گاه با جابجایی صفر بود. به همین دلیل بخش از کد نوشته شده در قسمت اصلاح ماتریس سختی و بردار نیرویی عملاً بدون استفاده بود. در اینجا هدف بررسی سازه‌ای است که در آن یکی از گره‌ها دارای جابجایی به عنوان شرایط مرزی است.

۱،۶. صورت مسئله

سازه‌ای همانند شکل ۸ را در نظر بگیرید. شماره‌ی گره‌ها و المان‌ها در شکل مشخص شده است.



شکل ۸

مختصات گره‌ها به صورت زیر است:

Node Number	x (m)	y (m)
1	0	0
2	1	0
3	2	0
4	0.5	0.7
5	1.5	0.7

مدول الاستیک $E_e = 200MPa$ و سطح مقطع $A_e = 100mm^2$می‌باشد. همچنین گره‌ی شماره‌ی ۲ دارای جابجایی برابر 0.1m در خلاف جهت محور Y می‌باشد. با مشخص بودن این موارد مطلوب است محاسبه:

- بردار جابجایی گره‌ای
- تنش در هر المان
- نیروی تکیه‌گاهی

۲،۶. برنامه MATLAB

بخش‌های اصلی برنامه همانند بخش قبل است و فقط ورودی‌ها و شرایط تکیه‌گاهی به همراه مرحله displacement result باید اصلاح شود. در این بخش فقط خطوط برنامه که تغییر کرده‌اند آورده می‌شود. برنامه با نام truss_2D_FEM_displacement موجود است.

خط ۱۲: اصلاح مساحت سطح مقطع

```
A_e=100; % unit mm^2,
```

خط ۱۵: اصلاح مختصات گره‌ها

```
node=[0 0;1 0;2 0;.5 .7;1.5 .7]; % nodal coordinate, unit m,
```

خط ۱۷: اصلاح ماتریس اتصال المانی

```
element=[1 2;2 3;1 4;4 2;2 5;3 5;4 5]; % element connection,
```

خط ۳۹: این عبارت حذف می‌شود، زیرا هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود.

خط ۴۰: با توجه به تکیه‌گاه‌ها و همچنین محل اعمال جابجایی گره‌ای شماره‌های این خط تغیر می‌کند. همانند گذشته از $2i-1$ و $2i$ برای تعیین این شماره‌ها استفاده‌شده است که i شماره گره می‌باشد.

```
prescribedDof=[1 2 4 6]; % supported node,
```

خط ۴۴: جابجایی در گره ۲ و در خلاف جهت محور Y در این بخش اعمال می‌شود.

```
U(4)=-.1; % u is a known displacement in a Node,
```

خط ۷۷ و ۷۸: برای رسم این سازه مسیری که از تمام المان‌ها عبور کند به ترتیب شامل گره‌های ۴، ۱، ۲، ۴، ۵، ۲، ۳ و ۵ می‌باشد. این مسیر برای مختصات گره‌ها قبل و بعد از جابجایی به صورت زیر اعمال شده است.

```
first_location=[node(4,:);node(1,:);node(2,:);node(4,:);node(5,:);…
                                                node(2,:);node(3,:);node(5,:)];
end_location=[last(4,:);last(1,:);last(2,:);last(4,:);last(5,:);last(2,:);…
                                                    last(3,:);last(5,:)];
```

خط ۸۳: با توجه به ابعاد سازه، محدوده‌ی رسم مجدداً تعین می‌شود.

```
axis ([-.1 2.1 -.1 1])
```

۳,۶. بررسی نتایج

با اجرای برنامه بردار جابجایی به دست می‌آید. این بردار را در برنامه به یک ماتریس تبدیل نمودیم. این ماتریس به صورت زیر است:

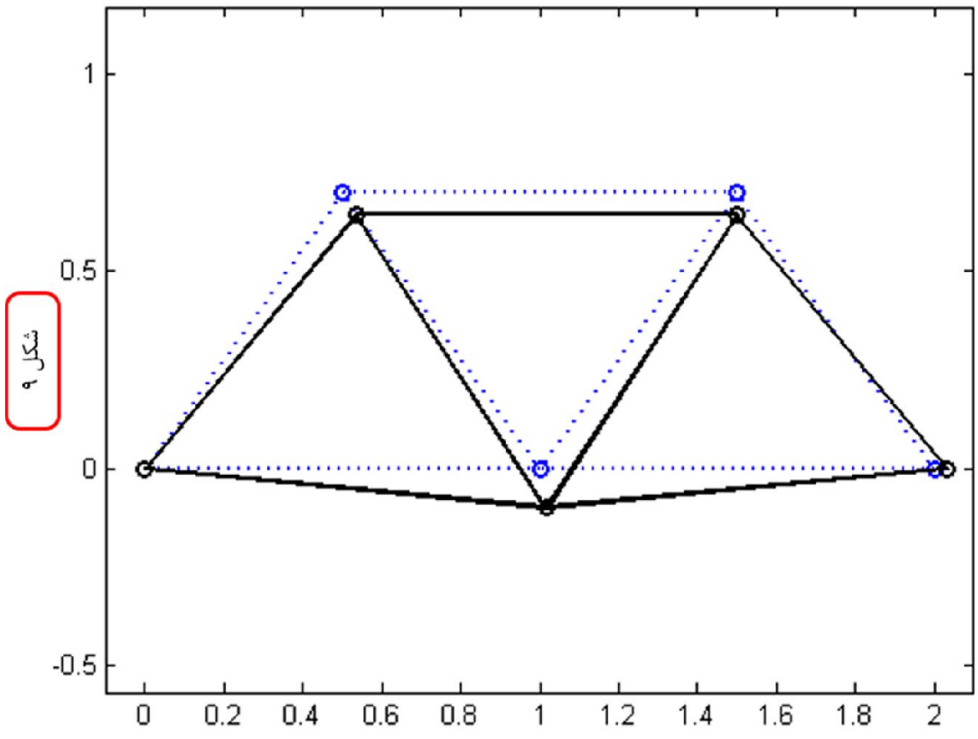
Node	u_i	u_j
1	0.00000	0.00000
2	0.01730	-0.10000
3	0.03460	0.00000
4	0.03460	-0.05618
5	0.00000	-0.05618

همچنین نمودار حاصل از بخش displacement result به صورت شکل ۹ است. در این شکل نیز همانند شکل ۷ اثر تکیه‌گاه‌ها به طور کامل مشخص است. تنش در المان‌ها نیز همانند جدول زیر است.

element	σ
1	3.46
2	3.46
3	-5.95
4	5.95
5	5.95
6	-5.95
7	-6.92

همچنین نیرو تکیه‌گاهی به صورت زیراست.

	Reaction force
$R_{1,x}$	0.00
$R_{1,y}$	484.39
$R_{2,y}$	-968.79
$R_{3,y}$	484.39



شکل ۹

۷. تمرین

در سازه‌ای همانند شکل ۱۰، مختصات گره‌ها به صورت زیر است:

Node Number	x (m)	y (m)
1	0	0
2	0	1.5
3	1.5	1.5
4	1.5	-1.5
5	-1.5	1.5
6	-1.5	-1.5

مدول الاستیک $E_e = 210MPa$ و سطح مقطع $A_e = 80mm^2$ می‌باشد. همچنین گره‌ی شماره‌ی 1 دارای جابجایی برابر 0.1m در جهت محور Y می‌باشد. با مشخص بودن این موارد مطلوب است محاسبه:

- بردار جابجایی گره‌ای
- تنش در هر المان
- نیروی تکیه‌گاهی

شکل ۱۰